Beispielaufgaben BKM

Sammlung, Stand 22. Februar 2019

In den folgenden elf Basalen fachlichen Studierkompetenzen Mathematik (BK) werden Inhalte des Lehrplans 21 für die Volksschule und des Lehrplans 17 für den gymnasialen Bildungsgang zusammengestellt, die jede Gymnasiastin und jeder Gymnasiast am Ende der Ausbildung beherrschen muss.

BK 1: Mit Zahlen, insbesondere auch mit Brüchen rechnen und Terme erkennen und ihren Wert berechnen

BK 2: Terme, insbesondere auch Bruchterme wertgleich umformen

BK 3: Potenzgesetze für Potenzen mit natürlichen Exponenten verstehen und anwenden

BK 4: Proportionalität und lineare Funktionen verstehen und auf Probleme anwenden;
Lineare Gleichungen und lineare Gleichungssysteme lösen

BK 5: Quadratische Gleichungen lösen

BK 6: Elementargeometrische Berechnungen in einfachen Figuren anwenden

BK 7: Fehlende Winkel und Längen im rechtwinkligen Dreieck berechnen

BK 8: Koordinatensystem zwei- und dreidimensional zeichnen und lesen

BK 9: Grundfunktionen erkennen und darstellen

BK 10: Einfache Grundfunktionen ableiten

BK 11: Grafische Darstellungen lesen und interpretieren

Diese Kernkompetenzen sind für viele Studiengänge relevant und sollen die Studierfähigkeit in einem pragmatischen Sinne garantieren, sie sind aber nicht hinreichend für die Matura in Mathematik. Die Gesamtheit der Kompetenzen und Inhalte des Mathematiklehrplans 17 definiert das Wissen und Können an der Matura.

Anhand von Testaufgaben bzw. Übungsaufgaben zu den der zwei Lehrpläne folgen Erläuterungen, wo und wie die oben aufgeführten Basalen Kompetenzen eingefordert werden können. Im Kapitel 1 werden Beispiel zu Inhalten aus der Übertrittszeit (7.-9. Schuljahr) besprochen. Dann folgen in den Kapitel 2 und 3 Beispiele zu Themen, die im gymnasialen Unterricht (1. und 2. Zyklus) behandelt werden.

1. Aufgabenbeispiele zum Übertritt

Aufgabe 1.1: Form und Raum (Argumentieren)

Finde eine präzise Antwort zu den folgenden Fragen und begründe in Worten, warum deine Antworten richtig sind:

a. In welchen Dreiecken ist eine Höhe gleich einer Winkelhalbierenden?

Ist die Höhe zugleich Winkelhalbierende, so ebenfalls Mittelsenkrechte. Daher ist das Dreieck (zumindest) gleichschenklig.

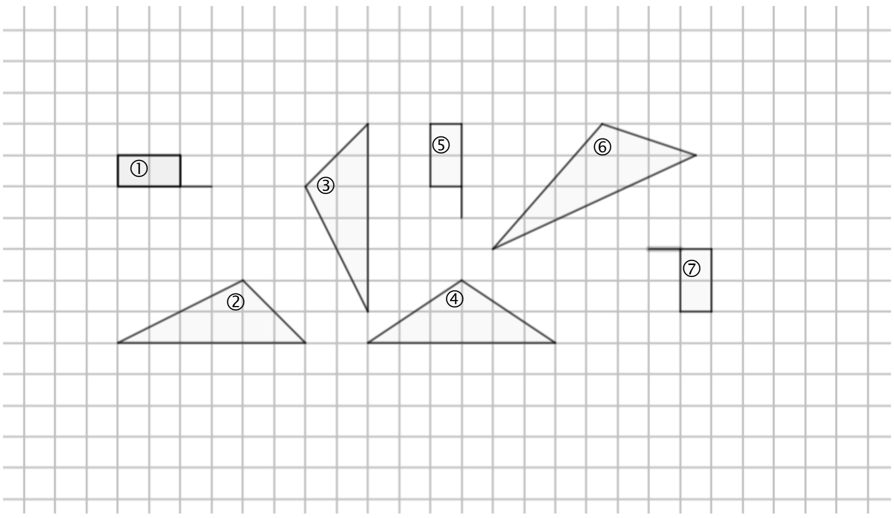
b. In welchen Dreiecken sind zwei Seitenhalbierenden identisch mit den Winkelhalbierenden?

Damit werden die Seitenhalbierenden zu Höhen und das Dreieck ist «zweimal gleichschenklig», also gleichseitig.

Bemerkung: *Beziehungen zwischen wichtigen Ortslinien in einem Dreieck gehören zu den Grundlagen der Elementargeometrie (BK 6). Ein Minimum an Argumentation diesbezüglich darf als basal eingestuft werden*

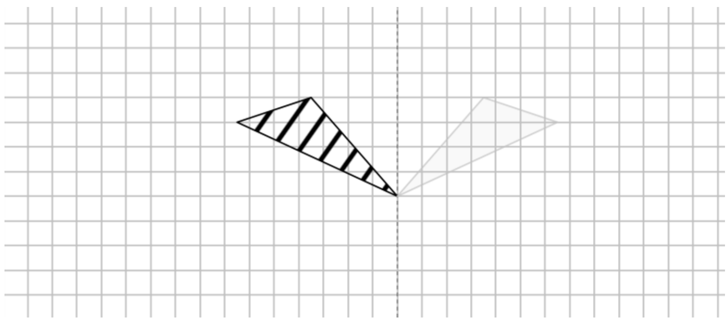
Aufgabe 1.2: Form und Raum (Benennen und Argumentieren)

a. Welche der Figuren in der Abbildung unten sind kongruent zueinander und wieso?



(1) und (5) sind kongruent, durch Drehung und Achsenspiegelung,
(2) und (3) sind kongruent, durch Drehung und Verschiebung.

b. Zeichne eine Figur, die zu ⑥ in der Abbildung oben kongruent ist und mit ⑥ genau einen gemeinsamen Punkt hat.



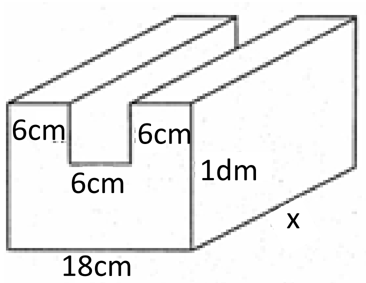
3

Zum Beispiel eine Spiegelung an einer Achse durch eine Ecke der Figur.

Bemerkung: *Das Herauslesen aus einer Graphik (BK 11) und daraus Schlüsse ziehen, z.B. um die Deckungsgleichheit elementargeometrischer Figuren (BK 6) herauszulesen, gehört zum basalen Umgang mit math. Darstellungen.*

Aufgabe 1.3: Form und Raum, Zahl und Variable (Benennen und Operieren)

Die Oberfläche des folgenden Körpers beträgt 5150 cm^2. Berechne x.



x = 71.5*cm*

Bemerkung: *Hier werden gleich mehrere Kompetenzen angewendet. Zuerst muss die Figur graphisch analysiert (BK 11) und in elementargeometrische Figuren zerlegt (BK 6), danach Terme umgeformt und berechnet (BK 1,2) werden.*

Aufgabe 1.4: Zahl und Variable (Benennen und Operieren)

Von einem Marathonlauf (42.2 km) hast Du 30 km zurückgelegt. Wie viel Prozent der Gesamtstrecke sind das?

ca. 71%

Bemerkung: *Direkte Proportionalität (BK 4) und mit Brüchen rechnen (BK 1) wird verlangt.*

Aufgabe 1.5: Zahl und Variable, Grössen und Funktionen (Operieren, Benennen, Darstellen und Mathematisieren)

Ein Jogger und eine Hobby-Radrennfahrerin trainieren gleich lange. Der Jogger läuft konstant mit 9 km/h und legt 12 km zurück. Die Rennfahrerin fährt konstant mit 24 km/h. Beide starten zur selben Zeit am gleichen Ort.

Stelle zu obigem Sachverhalt mindestens 2 Fragen, die du mittels Termen, Gleichungen, Graphiken o.ä. lösen kannst. Beantworte sodann deine Fragen entsprechend.

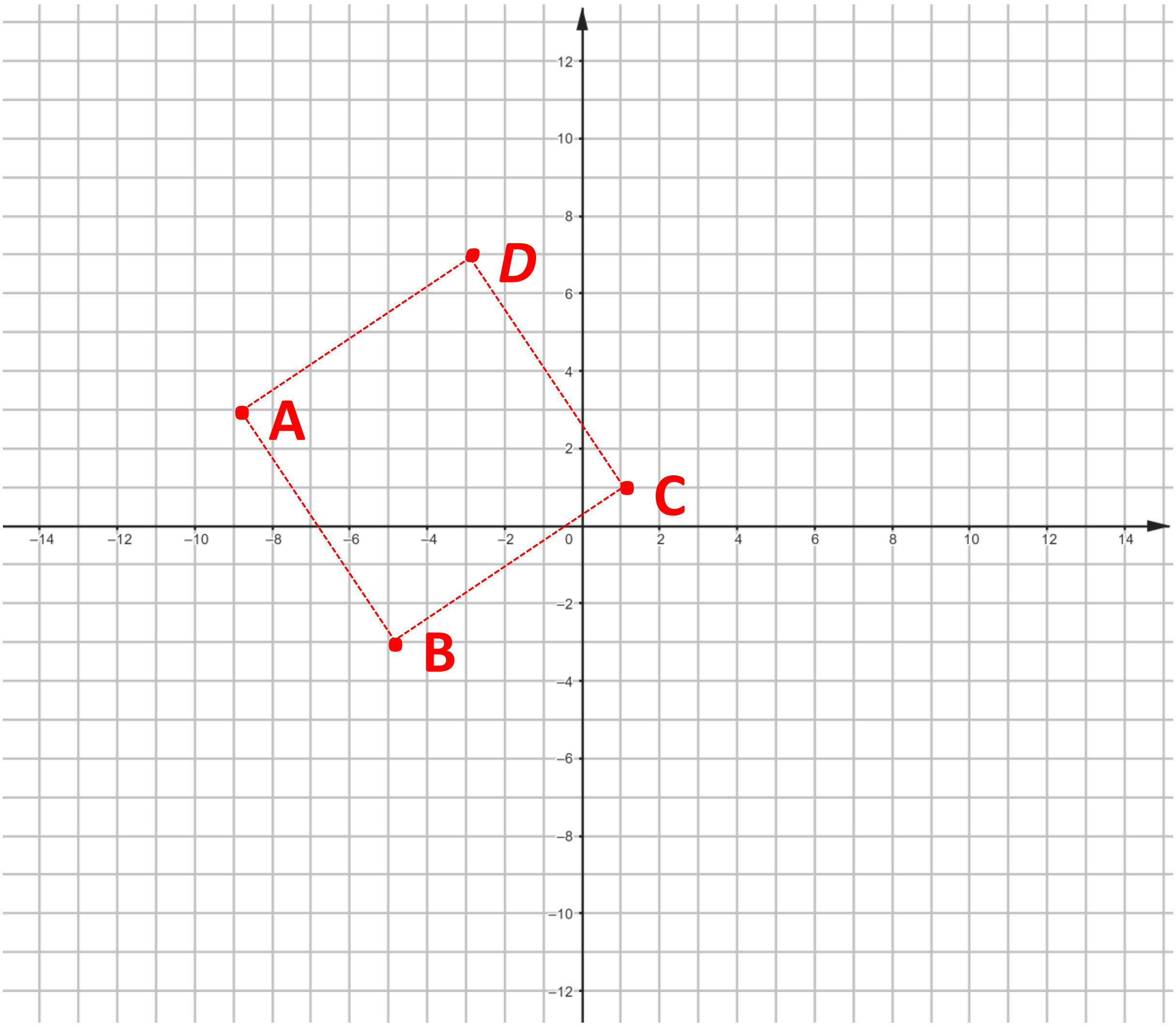
1) Wie lange braucht der Jogger für die 12 km?
2) Wie weit kommt die Rennfahrerin in der Zeit, die der Jogger für die 12 km braucht?
3) Wie viel später als die Rennfahrerin erscheint der Jogger bei km 6?
4) Wann sind Rennfahrerin und Jogger genau 10 km voneinander entfernt?
5) Nach welcher Zeit hat die Rennfahrerin die 9 km zurück gelegt?

Bemerkung: *Offene Fragen in Übungsaufgaben lassen Raum, um verschiedene Kompetenzen anwenden zu können. Hier sind es insbesondere die Themen Proportionalität (BK 4) sowie der Umgang mit Zahlen und Termen und deren*

Berechnungen (BK 1,2). Zudem wird ein flexibler Umgang verlangt, indem man frei ist, selber Fragestellungen zu entwerfen, die dann entsprechend adaptiv und mit Beziehungen zu verwendeten Begriffen allenfalls verschiedene Techniken erfordern.

Aufgabe 1.6: Form und Raum (Benennen, Darstellen und Argumentieren)

a. Ergänze im Koordinatensystem unten die drei Punkte A = (−9,3), B = (−5,−3) und C = (1,1) zu einem Quadrat.



***Bemerkung:** Das Abtragen von Punkten in zweidimensionale Koordinatensysteme (BK 8) wird verlangt.*

b. Wie lauten die Koordinaten der Ecke D von diesem Quadrat?

$$\boldsymbol{D = (-4, 8)}$$

__Bemerkung:__ Das Erkennen von elementargeometrischen Figuren (BK 6) sowie das Ablesen von Punkten im zweidimensionalen Koordinatensystem (BK 8) wird verlangt.

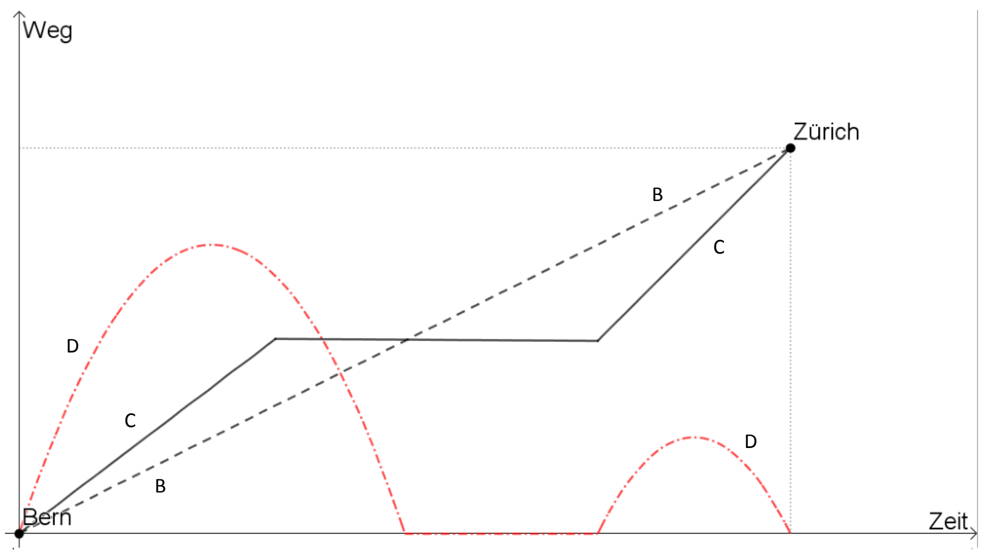
c. Begründe, weshalb die 3 Punkte A, B, C tatsächlich ein Quadrat aufspannen können.

die rechtwinkligen Ergänzungsdreiecke im Koordinatengitter am Rand des Quadrates sind kongruent Also gilt für den Winke in der Ecke B: $180° - \alpha - \beta = 90°$

Bemerkung:

Aufgabe 1.7: Funktionen (Benennen und Darstellen)

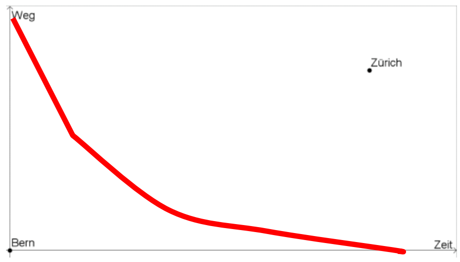
Das folgende Weg-Zeit-Diagramm stellt 3 Profile B, C, D von Autofahrten vor.



a. Erzähle in Worten, wie sich diese Profile B, C und D unterscheiden. Wie erleben die Fahrer die Geschwindigkeit des Autos auf ihrer Fahrt?

B fährt mit konstanter Geschwindigkeit; C fährt schneller als B, macht aber im mittl. Drittel eine Pause; D fährt sehr schnell ab, kehrt wieder nach Bern zurück, ruht in Bern, um danach einen zweiten Versuch zu wagen, kehrt jedoch nach kleinerer Distanz wieder zurück und erreicht Zürich nie.

b. Zeichne selber ein Profil A eines Autofahrers, der zuerst sehr schnell, dann immer langsamer von Zürich nach Bern fährt.



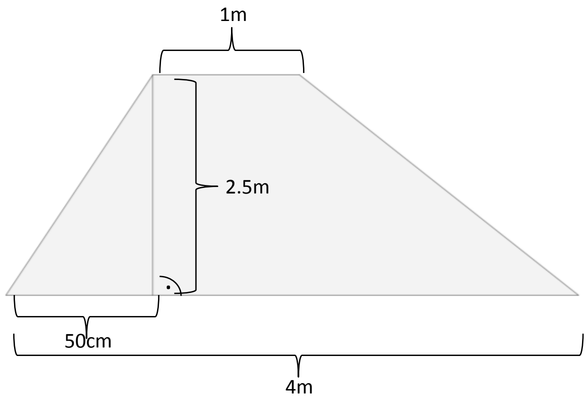
Bemerkung: *Das Lesen und Interpretieren von Grafischen Darstellungen (BK 11) wird verlangt.*

Aufgabe 1.8: Form, Raum und Zahl (Benennen, Operieren und Argumentieren)

7 a. Wieso kann ein Dreieck mit den Seitenlängen a = 12, b = 8, c = 3 nicht konstruiert werden?

Die Summe der Seiten a und b ist kleiner als die Seite a.

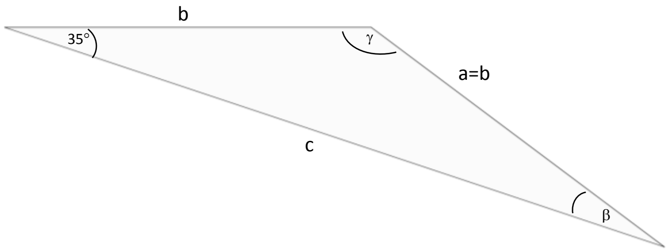
b. Berechne auf 2 unterschiedliche Arten-den Flächeninhalt des Trapezes:



$$= \frac{1}{\ } \cdot \mathbf{(4+1)} \qquad = \qquad [\mathbf{m}^2]$$

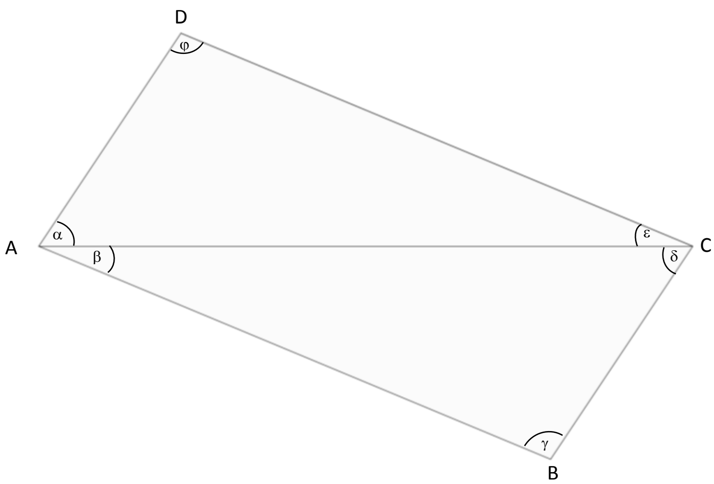
$$= \frac{1}{\ } \cdot \mathbf{0} \qquad \mathbf{1} \qquad \frac{1}{\ } \qquad = \qquad [\mathbf{m}^2]$$

c. Berechne die fehlenden Winkel im gleichschenkligen Dreieck:



$\beta = 35°, \gamma = 110°$

d. Begründe, welche Winkel im Parallelogramm ABCD (mit der Diagonalen AC) gleich gross sind:

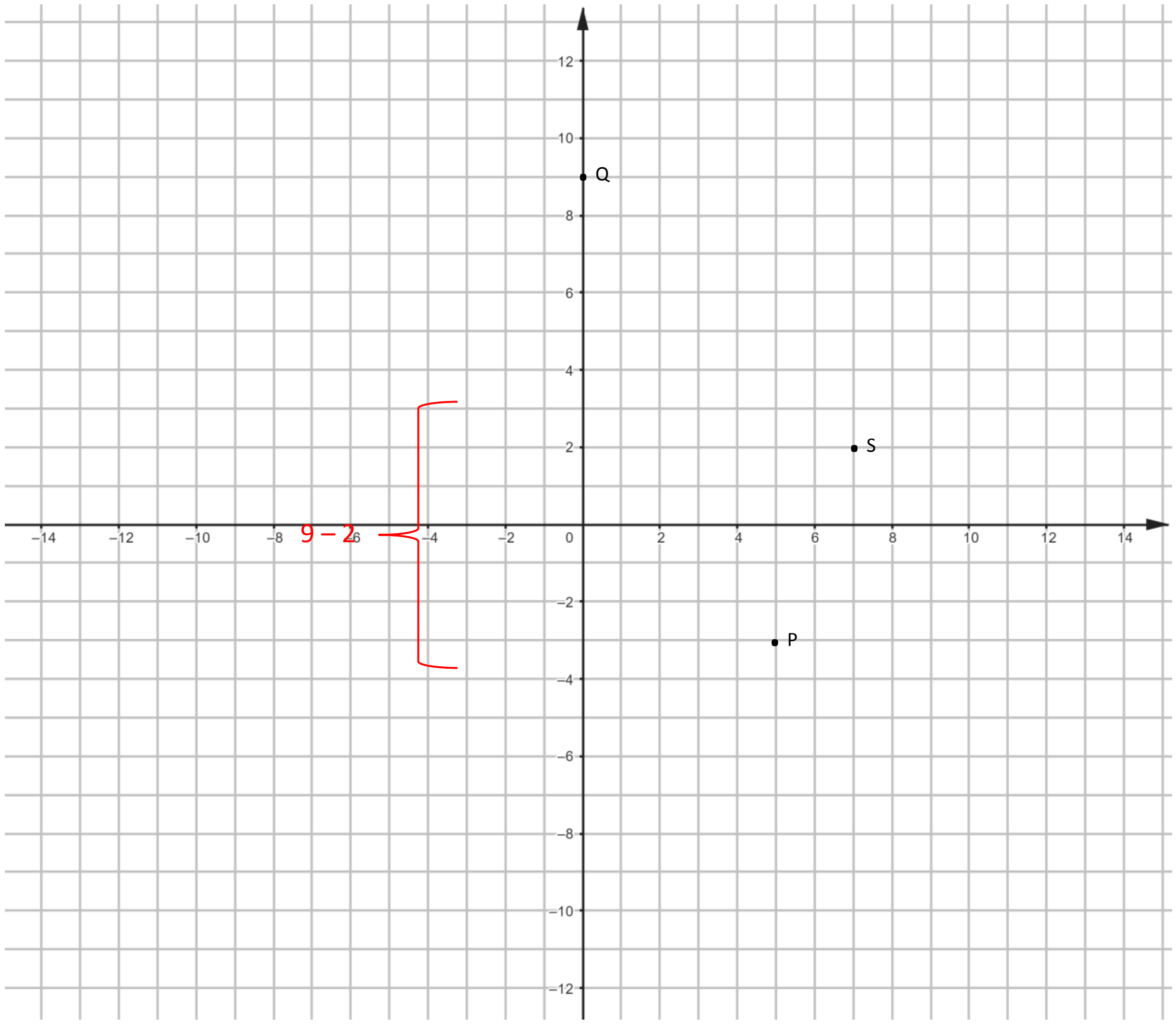


$\alpha = \delta,\ \beta = \varepsilon,\ \gamma = \varphi$

Bemerkung: *Das Berechnen von Flächeninhalten elementarer Figuren (Dreieck, Trapez u.ä.) wird ebenso verlangt wie das Erkennen gleicher Winkel an elementargeometrischen Figuren (Parallelogramm u.a.): (BK 6).*

Aufgabe 1.9: Form, Raum und Zahl (Benennen, Operieren)

a. Trage im Koordinatensystem unten den Punkt A = (8,3), den Punkt B mit den Koordinaten x = -6 und y = 0, den Punkt C = (1.5,1.5), sowie alle Punkte D mit gleicher x- und y-Koordinate ein.



b. Welche Koordinaten haben die oben eingetragenen Punkte P, Q und S?

P = (5, -3); Q = (0,9); S = (7, 2)

c. Welche Koordinaten hat der Eckpunkt R auf der y-Achse, wenn QRS ein gleichschenkliges Dreieck mit Basis QR ist?

Bemerkung: *Das Abtragen von Punkten in zweidimensionale Koordinatensysteme (BK 8) wird verlangt. Ergänzen von Punkten zu einer elementargeometrischen Figur (BK 6) braucht Handwerk wie Spiegeln, Drehen und Verschieben.*

Aufgabe 1.10: Zahl (Operieren ohne Taschenrechner)

a. Erkläre auf 2 verschiedene Arten, wie Du 84 – 35 + 16 im Kopf berechnest.

Lösung 1: *Ich subtrahiere zuerst die 35 von den 84, erhalte dabei 49 und addiere zu diesen 49 die 16 und erhalte als Schlussresultat 65.*

Lösung 2: *Ich addiere 16 zu 84 und erhalte 100. Anschliessend subtrahiere ich davon 35 und erhalte 65.*

Bemerkung*: Das Rechnen mit Zahlen (BK 1) und das Umformen wertgleicher Terme (BK 2) werden hier verlangt.*

b. Erkläre in Worten, mit allfälligen Formeln, wie Du im Kopf 145·155 ausrechnen kannst.

Lösung: *Ich multipliziere* $100 \cdot 155 =$ $'500$*, danach* $=$ $0,$ $= 2'200$ *und zum Schluss* $5 \cdot 100 = 500$ *und* $5 \cdot 55 = 275$*. Zum Schluss addiere ich alle Zwischenresultate:* $=$ *oder mittels «dritter» bin. Formel.*

Bemerkung*: Das Rechnen mit Zahlen (BK 1) und das Umformen wertgleicher Terme (BK 2) werden hier verlangt.*

c. Zeige schrittweise (beispielsweise anhand eines Modells), wie Du – mit – addierst.

Lösung: *Ich mache die beiden Brüche gleichnamig in dem ich den ersten mit – und den zweiten mit – multipliziere. Somit erhalte ich* – – – – = — — = —.

Bemerkung*: Das Rechnen mit Brüchen (BK 1) und das Umformen wertgleicher Bruchterme (BK 2) werden hier verlangt.*

d. Kreuze an, welche der Termumformungen FALSCH sind und erkläre wieso?

Term	□ Umformung 1	□ Umformung 2	□ Umformung 3
25 + 20 – (2 + 4)	25 + 20 – 2 + 4	25 + 20 – 2 – 4	25 + (20 – 2) – 4

Lösung: *Umformung 1 ist falsch, da ich durch Umformen des ersten Terms 4 subtrahieren und nicht addieren müsste.*

Bemerkung*: Das Rechnen mit Zahlen (BK 1) und das Umformen wertgleicher Terme (BK 2) werden hier verlangt.*

e. In einer Stadt mit 134‘000 Einwohnern gehen bei einer Abstimmung 52% an die Urnen. Wie viele sind das?

Lösung: $\frac{\quad}{\quad} \cdot 52 = 1'340 \cdot 52 =$

***Bemerkung**: Das Rechnen mit Zahlen und Brüchen (BK 1) wird hier verlangt. Ebenso muss man hier die Proportionalität auf Probleme anwenden (BK 4).*

Aufgabe 1.11: Zahl (Operieren mit Taschenrechner)

Berechne und schreibe anschliessend das Resultat jeweils in der wissenschaftlichen Form mit 3 Nachkommastellen (also mit Hilfe von Zehnerpotenzen)

Beispiel: 12345 = $1.235 \cdot 10^4$:

11 a. =

Lösung: $=$

***Bemerkung**: Das Rechnen mit Zahlen (BK 1) und das Umformen wertgleicher Terme (BK 2) werden hier verlangt.*

b. $=$

Lösung: $=$

***Bemerkung**: Das Rechnen mit Zahlen (BK 1) und das Umformen wertgleicher Terme (BK 2) werden hier verlangt.*

Aufgabe 1.12: Zahl und Variable (Operieren und Argumentieren)

a. Vereinfache so weit wie möglich:

$- (54 - \quad - 3) - (15 \qquad 1) \qquad (3a - \quad - \quad) -$

Lösung: $- \quad -$

***Bemerkung**: Das Rechnen mit Termen (BK 1) und das Umformen wertgleicher Terme (BK 2) werden hier verlangt.*

b. Welcher Term muss jeweils in der Klammer ( ) stehen, damit die die Gleichung erfüllt ist? Deine Überlegungen/Rechnungswege sollten, wo nötig, ersichtlich sein.

i. $- (\ ) = x -$

Lösung: $(\ ) = \quad - \quad =$

ii. $- \quad (\ ) - \quad =$

Lösung: $(\ ) = \quad - \quad - \quad = \quad -$

iii. $\frac{}{(\ )} = -$

Lösung: $(\ ) =$

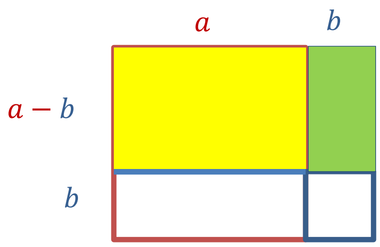
$-\frac{(\ )}{} =$

Lösung: $(\ ) = -a$

Bemerkung: *Das Rechnen mit Zahlen (BK 1) und das Umformen wertgleicher Terme (BK 2) werden hier verlangt.*

c. Zeige anhand eines Modells, wieso $(\quad + b)(a - b)$ gleich $a^2 -$ ist und berechne anschliessend $(\quad z)(2y - 5z)$.

Lösung 1:



Inhalt der gelben Fläche: $a(a-b) = \quad -ab$. *Inhalt der grünen Fläche:* $(a-b)b = \quad -b^2$. *Wir addieren nun die beiden Flächen und erhalten:* $\quad -ab+ab-b^2 = a^2-b^2$.

Lösung 2: $(2 \quad z)(2y-5z) = \quad -$

Bemerkung: *Das Rechnen mit Termen (BK 1) und das Umformen wertgleicher Terme (BK 2) werden hier verlangt.*

d. Kürze den Bruch und schreibe das Resultat sowohl als Bruch als auch als Dezimalzahl:

——

Lösung: —— = — = - =

Bemerkung*: Das Rechnen mit Brüchen (BK 1) und das Umformen wertgleicher Bruchterme (BK 2) werden hier verlangt.*

e. Kürze den Bruch soweit wie möglich und lasse das Resultat als Bruch stehen:

– —— =

Lösung: – —— = —

Bemerkung*: Das Rechnen mit Brüchen (BK 1) und das Umformen wertgleicher Bruchterme (BK 2) werden hier verlangt.*

f. Erkläre in wenigen Worten, allenfalls mit Formeln begleitet, weshalb

$(-a)^2$ nicht dasselbe ist wie – a^2.

Lösung: *bei $(-a)^2$ wird $-a$ mit $-a$ multipliziert und man erhält a^2. Bei – rechnet man zuerst Potenz vor Strich, sprich, man rechnet a^2 und wendet erst dann die Subtraktion darauf an, weshalb $-a^2$ nicht vereinfacht werden kann.*

Bemerkung*: Das Rechnen mit Termen (BK 1) und das Umformen wertgleicher Terme (BK 2) werden hier verlangt.*

g. Zeige auf zwei Arten, dass gilt: –   – .

Lösung 1: – = — , – = — ; —   — *und somit* –   –

Lösung 2: *Wenn ich einen (runden) Kuchen auf 3 Freunde verteile, erhält jeder mehr, als wenn ich ihn auf 4 Freunde verteilen würde.*

Bemerkung*: Das Rechnen mit Brüchen (BK 1) und das Umformen wertgleicher Bruchterme (BK 2) werden hier verlangt.*

h. Zeige bildhaft, dass $a + (b + c)$ gleich $(a + b) + c$ ist.

***Bemerkung**: Das Rechnen mit Termen (BK 1) und das Umformen wertgleicher Terme (BK 2) werden hier verlangt.*

i. Zeige auf 2 verschiedene Arten, dass gilt: $3(4\ +\ 7)\ =\ 33$

Lösung 1: $3 \cdot 4 + 3 \cdot 7 = 12 + 21 = 33$

Lösung 2: $3 \cdot 11 = 33$

***Bemerkung**: Das Rechnen mit Termen (BK 1) und das Umformen wertgleicher Terme (BK 2) werden hier verlangt.*

Aufgabe 1.13: Zahl, Variable und Form (Operieren und Argumentieren)

Gegeben ist folgenden Formel, wobei A ein Flächeninhalt, g eine Grundlinie und h eine Höhe ist.

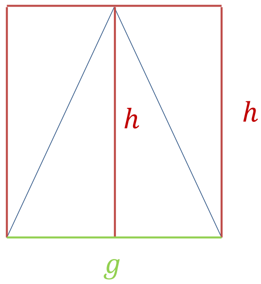
$A = \frac{gh}{2}$

a. Woher könnte die folgende Formel stammen und wozu dient sie?

***Lösung:** Die Formel dient dazu, den Flächeninhalt eines Dreiecks zu berechnen. Durch das Multiplizieren der Grundlinie und der Höhe erhält man den Flächeninhalt eines Rechtecks. Halbiert man nun diesen Flächeninhalt, erhält man jenen eines Dreiecks.*

***Bemerkung**: Anwendungen elementargeometrischer Berechnungen an einfachen Figuren (BK 6).*

b. Mache eine kleine Skizze, um die Formel zu begründen/erklären.



***Lösung:** Durch das Multiplizieren der Grundlinie und der Höhe erhält man den Flächeninhalt eines Rechtecks. Halbiert man nun diesen Flächeninhalt, erhält man jenen eines Dreiecks.*

Bemerkung: Anwendungen elementargeometrischer Berechnungen an einfachen Figuren (BK 6).

c. Stelle die Formel um, so dass steht $g = ...$

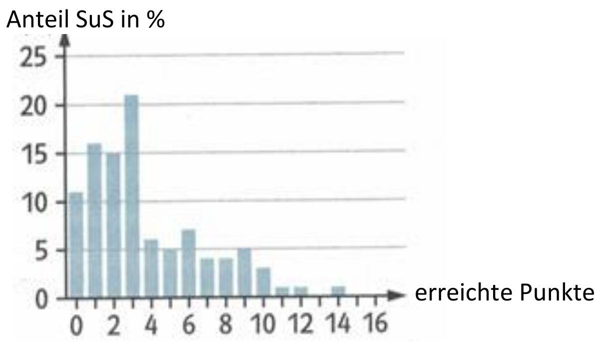
Lösung: $g = —$

Bemerkung: Bruchterme werden wertgleich umgeformt (BK 2).

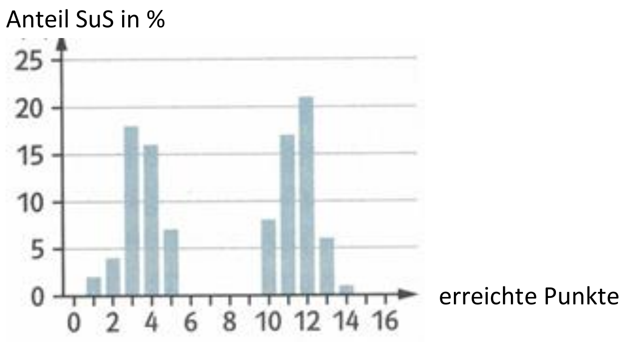
Aufgabe 1.14: Daten und Zahl (Operieren, Benennen und Erforschen)

Ein Lehrer veröffentlicht nach einer Prüfung in 2 verschiedenen Jahrgängen folgende grafischen Darstellungen. In der Prüfung konnten maximal 16 Punkte erreicht werden. Ab 10 Punkten kriegt man eine genügende Note.

Jahrgang A



Jahrgang B



Begründe jeweils deine Antworten.

a. Welcher Jahrgang hat den höheren Durchschnitt?

Lösung: *Durchschnitt Jahrgang A* $=$

$$(5 + 9) + 0.07 \cdot 6 + 0.04 \cdot (\quad 8)$$

$(11 + 12 + 14) =$

Durchschnitt Jahrgang B $=$

$$=$$

Jahrgang B hat den höheren Durchschnitt.

Bemerkung: Man muss mit Zahlen, insbesondere Brüchen rechnen (BK 1), sowie graphische Darstellungen lesen und interpretieren können (BK 11).

b. Wie viele Schülerinnen und Schüler (in % aller SuS) waren jeweils genügend?

Lösung: *Prozentzahl genügender SuS Jahrgang A* $= 3 + 1 + 1 + 1 = 6\%$

Prozentzahl genügender SuS Jahrgang B $= 8 + 17 + 21 + 6 + 1 = 53\%$

Bemerkung*: Man muss mit Zahlen, insbesondere Brüchen rechnen (BK 1), sowie graphische Darstellungen lesen und interpretieren können (BK 11).*

c. Was kannst du noch über die beiden Jahrgänge aussagen?

Beispiellösung: *Im Jahrgang B hatte es nur schlechte oder gute Punktzahlen, aber keine im Mittelfeld.*

Bemerkung*: Man muss graphische Darstellungen lesen und interpretieren können (BK 11).*

2. Aufgabenbeispiele zum 1. Zyklus

Aufgabe 2.1: Algebra (Termumformungen)

a. Schreiben Sie die drei Terme als vollständig gekürzte Brüche:

$i) \quad \frac{(6 \qquad)}{(3abc)}$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{\frac{2b}{c}}$

__Bemerkung:__ Die Potenzgesetze für Potenzen mit natürlichen Exponenten (BK 3) und das Kürzen von gemeinsamen Faktoren (BK 2) wird verlangt. Die Zahlen sind nur aus Primfaktoren 2 und 3 zusammengesetzt, so dass die Berechnung durch Kürzen (also ohne zu rechnen) möglich wird.

$ii) \quad \frac{kn - 5k}{kn^2 - 10kn \quad 25k}$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{\frac{1}{n -}}$

__Bemerkung:__ Faktorisieren von Polynomen und das Kürzen von gemeinsamen Faktoren (BK 2) wird verlangt. Nach der Ausklammerung von k im Nenner soll der Term als Binom hoch zwei erkannt werden (BK 1).

$iii) \qquad : \left(- - \frac{}{} \right)$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{\frac{x(x+h)}{}}$

__Bemerkung:__ Strich und Punktoperationen mit Brüchen und das Kürzen von gemeinsamen Faktoren (BK 2) wird verlangt. Terme dieser Form kommen später in der Analysis (Differenzenquotient) wieder vor.

b. Vereinfachen Sie die drei Terme so weit wie möglich:

$i) \quad (x + 2y)^2 - (x - 2y)^2$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{8xy}$

__Bemerkung:__ Die Binomischen Formeln und Grundoperationen (BK 2) werden verlangt. Der Term hat die Form Quadrat minus Quadrat und kann daher auch direkt mit der dritten Binomischen Formel faktorisiert werden. Durch das Erkennen dieser Form (BK 1) wird die Lösung schneller gefunden.

$ii) \quad s - (1 - (1 - s))(1 - s)$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{s}$

__Bemerkung:__ Rechnen mit Klammern und die Regel Punkt vor Strich (BK 2) *wird verlangt. Der Term in der ersten Klammer ist äquivalent zum Monom s. Das Erkennen dieser Form (BK 1) vereinfacht die Berechnung.*

$iii)\quad \dfrac{3}{u^2-2u-8}-\dfrac{2}{u^2-4}$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{\dfrac{1}{(u-2)(u-4)}}$

Bemerkung: *Rechnen mit Bruchtermen und das Faktorisieren von Polynomen (BK 2) wird verlangt. Der entstehende Zähler u+2 nach der Subtraktion der gleichnamigen Brüche kann gekürzt werden. Das Ausmultiplizieren des gemeinsamen Nenners (kgV) wäre also nicht zielführend (BK 1).*

Aufgabe 2.2: Algebra (Gleichungen lösen)

a. Lösen Sie die drei Gleichungen und vereinfachen Sie, falls möglich, die Lösungen. Suchen Sie vorteilhafte Lösungswege, die den Rechenaufwand verkleinern.

$i)\quad \dfrac{2x-1}{6-x}=\dfrac{4x-2}{4x+6}$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{L}=\left\{\boldsymbol{\dfrac{1}{2}},\boldsymbol{1}\right\}$

Bemerkung: *Das Kürzen (BK 2) und das Lösen von linearen oder allenfalls quadratischen Gleichungen (BK 4, BK 5) wird verlangt. Der Bruch auf der rechten Seite kann gekürzt werden (BK 1), dann haben die Brüche auf beiden Seiten der Gleichung denselben Zähler $2x-1$, also ist die Lösung $x=1/2$ wegen $0=0$ direkt ablesbar. Die zweite Lösung wird aus der äquivalenten Gleichung $6-x=2x+3$ gefunden.*

$ii)\quad 2x^2-20x+69=21$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{L}=\{\,\boldsymbol{4},\boldsymbol{6}\,\}$

Bemerkung: *Das Lösen von quadratischen Gleichungen (BK 5) wird verlangt. Wenn nach dem Umstellen in die Grundform der Faktor 2 aus der Gleichung dividiert wird, kann das Polynom direkt faktorisiert werden. Die Lösungsformel ist nicht nötig.*

$iii)\quad x^2+2x+2=0$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{L}=\{\ \ \}$

__Bemerkung:__ Das Lösen von quadratischen Gleichungen (BK 5) wird verlangt. Dass die Gleichung keine reelle Lösung hat, folgt aus der negativen Diskriminante. Andrerseits wird das auch klar, wenn auf beiden Seiten 1 subtrahiert wird. Das Polynom auf der linken Seite ist dann das Quadrat von $x + 1$ (Binomische Formel), also eine nicht negative Zahl. Auf der rechten Seite steht aber die negative Zahl -1.

b. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$$3y = 2x + 1$$
$$4x - 5y = 1$$

$\mathbb{L} = \{\,(\mathbf{4}, \mathbf{3})\,\}$

__Bemerkung:__ Das Lösen von linearen Gleichungssystemen (BK 4) wird verlangt. Das Eliminieren von x führt zu einem einfacheren Lösungsweg als das Eliminieren von y, weil 4 ein Vielfaches von 2 ist.

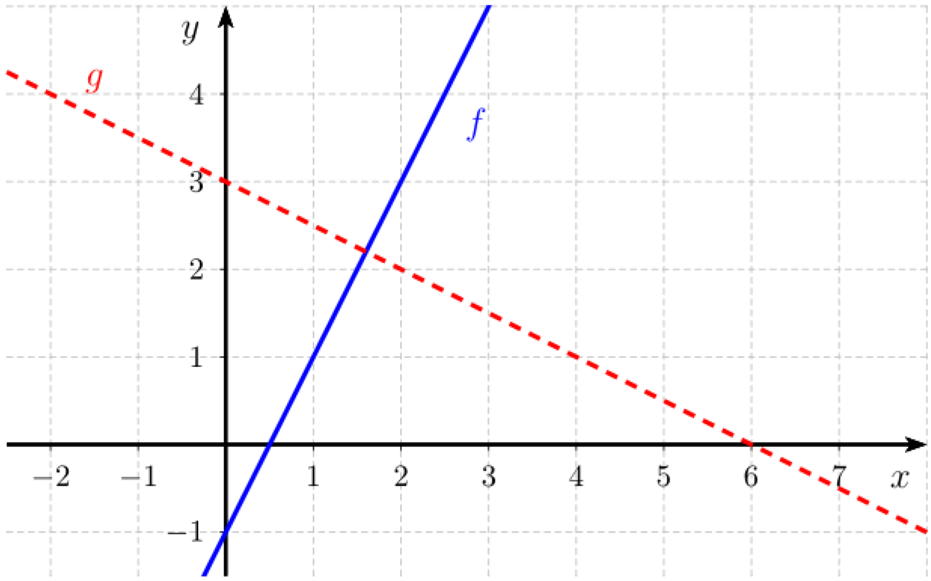
19 c. In einem Jungendheim gibt es 18 Zimmer (Vierbett- und Sechsbettzimmer), in denen insgesamt 84 Jugendliche untergebracht werden können. Wie viele Vierbett- bzw. Sechsbettzimmer sind es?

12 Vierbettzimmer
6 Sechsbettzimmer

__Bemerkung:__ Das Verstehen bzw. Anwenden von Proportionen und das Lösen von linearen Gleichungssystemen (BK 4) wird verlangt. Der Faktor 2 kann aus der Gleichung $4x + 6y = 84$ für die Anzahl Betten dividiert und in die Gleichung $x + y = 18$ für die Anzahl Zimmer multipliziert werden. Dieses Gleichungssystem ist ohne grossen Rechenaufwand lösbar.

Aufgabe 2.3: Analysis (Lineare Funktionen)

a. Bestimmen Sie aus der Abbildung unten die Gleichung der Funktion f.



$\boldsymbol{f(x) = 2x - 1}$

Bemerkung: *Das Verstehen von linearen Funktionen (BK 4) wird verlangt. Die Aufgabe kann algebraisch oder geometrisch gelöst werden. Für den geometrischen Lösungsweg muss die Steigung und der y-Achsenabschnitt aus dem Graphen bestimmt werden.*

b. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $g(x) = -0.5x + 3$ in der Abbildung oben ein.

Bemerkung: *Das Verstehen von linearen Funktionen (BK 4) wird verlangt. Die Zeichnung in der Teilaufgabe ist einfach zu erstellen, wenn z.B. die Nullstelle $x = 6$ und der y-Achsenabschnitt $y = 3$ erkannt werden.*

c. Berechnen Sie den Schnittpunkt der Graphen von f und g.

$\boldsymbol{S = (1.6, 2.2)}$

Bemerkung: *Das Lösen von linearen Gleichungssystemen (BK 4) wird verlangt. Aus dem Kontext der Funktionen muss über das Aufstellen eines Gleichungssystems der Transfer in die Algebra gemacht werden.*

d. Wie muss bei einer Funktion $h(x) = -0.5x + b$ der Parameter b gewählen werden, damit sich die Graphen von h und f im Punkt $(2{,}3)$ schneiden?

$$\boldsymbol{b = 4}$$

Bemerkung: *Das Verstehen von linearen Funktionen (BK 4) wird verlangt. Die Aufgabe kann algebraisch oder geometrisch gelöst werden. Wenn die Koordinaten in die Funktionsgleichung eingesetzt werden, muss eine lineare Gleichung gelöst werden. Die geometrische Lösung setzt voraus, dass h als Parallelverschiebung von g in den Punkt* $(2{,}3)$ *des Graphen von f erkannt wird.*

Aufgabe 2.4: Geometrie (Pythagoras und Trigonometrie)

a. Gegeben sei ein Dreieck mit den Seitenlängen $a = 8$, $b = 6$ und $c = 10$.

i) Warum muss dieses Dreieck rechtwinklig sein?

$$\boldsymbol{10^2 = 8^2 + 6^2}$$

Bemerkung: *Das Verstehen des Satzes von Pythagoras (BK 7) wird verlangt. Weil die Aussage des Satzes umkehrbar ist, reicht das Verifizieren der Gleichung als Begründung.*

ii) Berechnen Sie dann die beiden noch unbekannten Winkel auf zwei Nachkommastellen genau im Gradmass. Wie können diese Winkel ins Bogenmass umgerechnet werden?

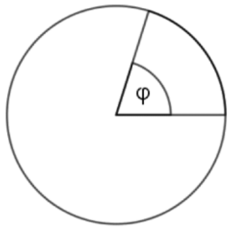
$$\boldsymbol{\alpha = \sin^{-1}(0.8) = \cancel{\arcsin 0.8} \approx 53.13° \xrightarrow{\cdot\frac{\pi}{180°}} 0.93\ \text{rad}}$$

$$\boldsymbol{\beta = 90° - \alpha = \sin^{-1}(0.6) = \cancel{\arcsin 0.6} \approx 36.87° \xrightarrow{\cdot\frac{\pi}{180°}} 0.64\ \text{rad}}$$

Bemerkung: *Das Berechnen von Winkel im Rechtwinkligen Dreieck mit Sinus oder Cosinus (BK 7) und das Umrechnen vom Gradmass ins Bogenmass (BK 4) wird verlangt. Weil Taschenrechner die Umrechnung direkt machen können, ist eine Begründung anzugeben.*

Aufgabe 2.5: Geometrie (Bogenmass)

Sie schneiden ein Stück einer kreisrunden Torte ab. Wie können Sie mit einem Massband den Winkel φ Ihres Kuchenstücks bestimmen?

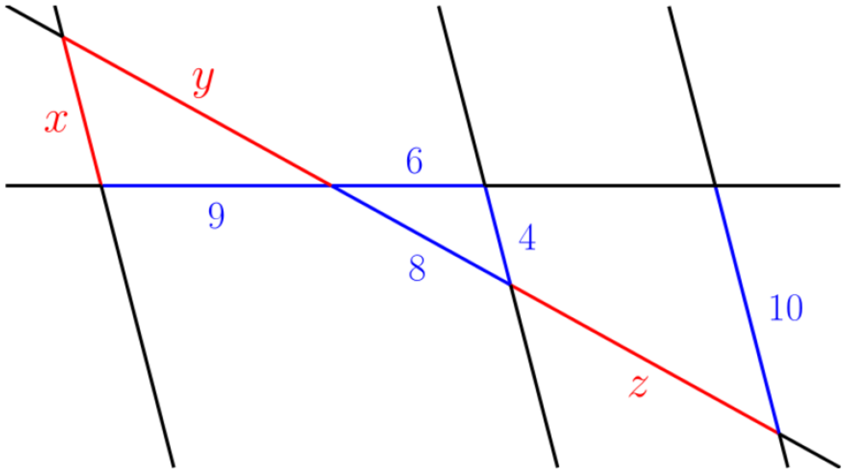


Man misst die Bogenlänge und den Radius. Der Quotient entspricht dem Winkel im Bogenmass.

Bemerkung: *Das Bogenmass (BK 4) flexibel einsetzen können.*

Aufgabe 2.6: Geometrie (Ähnlichkeit)

a. Berechnen Sie die Längen x, y und z der entsprechenden Strecken:



$\boldsymbol{x = 6, y = 12, z = 12}$

Bemerkung: *Das Erkennen von ähnlichen Dreiecken, die Beziehungen zwischen ähnlichen Figuren (BK 6) und das Rechnen mit Proportionen (BK 4) wird verlangt. Wenn die Aufgabe mit Hilfe der Streckungsfaktoren* $9 : 6 = 1.5$ *und* $10 : 4 = 2.5$ *gelöst wird, sind die Resultate ablesbar und Gleichungen sind nicht nötig.*

b. In welchem Verhältnis stehen die beiden grauen Dreiecksflächen (9-x-y) und (6-8-4)? Begründen Sie.

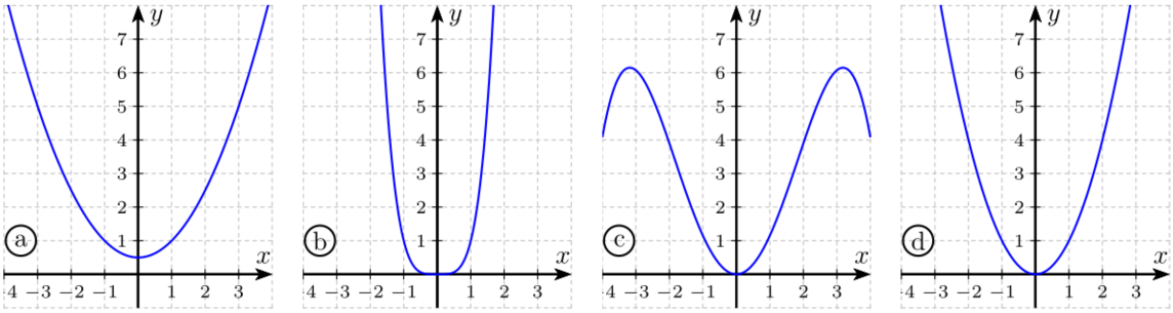
9 : 4

Hier fehlt eine Figur!

Bemerkung: *Dass Flächeninhalte ähnlicher Figuren sich zum Quadrat entsprechender Seitenlängen verhalten, kann als basal erachtet werden.*

Aufgabe 2.7: Analysis (Verschiedene Funktionstypten)

a. Gegeben sind die zwei Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^4$. Welcher der folgenden Graphen gehört zur Funktion f bzw. g? Begründen Sie warum!



23

Graph in Abb. (a) geht nicht durch den Ursprung
Graph in Abb. (c) wächst für $x > 0$ nicht monoton
Graph von f ist in Abb. (d), Graph von g ist in Abb. (b),
weil für $x > 1$ die Werte in (d) kleiner sind als in (b)

Bemerkung: *Das Erkennen von Grundfunktionen (BK 9) wird verlangt. Mit Eigenschaften der Potenzen von positiven natürlichen Zahlen kann der Graph eindeutig zugeordnet werden. Ein konkretes Rechnen und Ablesen von Funktionswerten ist nicht nötig.*

b. Wie unterscheiden sich die Wertebereiche der Funktion $f(x) = x^2$ von der Funktion $h(x) = x^3$? Erklären Sie wieso.

$\mathbb{W}_f = \mathbb{R}^+$, **weil** $(-) \cdot (-) = (+)$
$\mathbb{W}_h = \mathbb{R}$, **weil** $(-) \cdot (-) \cdot (-) = (-)$

Bemerkung: *Eigenschaften von Grundfunktionen (BK 9) werden verlangt.*

Aufgabe 2.8: Analysis (Quadratische Funktionen)

Wieso hat die Parabel mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$ keine Schnittpunkte mit der x-Achse?

$f(x) = 0$ führt auf eine quadratische Gleichung ohne Lösung.

Bemerkung: *Das Erkennen von Grundfunktionen (BK9) und allenfalls das Lösen von quadratischen Gleichungen (BK5) wird verlangt. Hier führt der Ansatz $f(x) = 0$ auf eine quadratische Gleichung, die keine Lösung hat. Auch mit der Lage des Scheitels und der positiven Öffnung der Parabel kann argumentiert werden.*

3. Aufgabenbeispiele zum 2. Zyklus

Aufgabe 3.1: Analysis (Ableitungen)

a. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \quad - \quad - 1$.

i) Bestimmen Sie die erste und die zweite Ableitung von f.

$$\boldsymbol{f'(x) = 20x^3 - 6x \quad 1} \text{ **und** } \boldsymbol{f''(x) = 60x^2 - 12x}$$

Bemerkung: *Das Ableiten von Polynomfunktionen (BK 10) wird verlangt.*

ii) Berechnen Sie $f'(-2)$ und $f''(-1)$.

$$\boldsymbol{f'(-2) = -183} \text{ **und** } \boldsymbol{f''(-1) = 72}$$

Bemerkung: *Das Rechnen mit einfachen Zahlen und Brüchen (BK 1) wird verlangt.*

iii) An welchen Stellen x hat die zweite Ableitung von f den Wert Null?

$$\boldsymbol{x = 0} \text{ **und** } \boldsymbol{x = 0}.$$

Bemerkung: *Das Lösen von quadratischen Gleichungen wird verlangt.*

iv) Für welche Funktion F gilt $F'(x) = f(x)$ und $F(1) = 2$?

$$\boldsymbol{F(x) = x^5 - \frac{1}{\ }x^4 \quad \frac{1}{\ }x^2 - x}$$

Bemerkung: *Das Ableiten von Polynomfunktionen (BK 10) und das Rechnen mit einfachen Zahlen und Brüchen (BK 1) wird verlangt. Diese Aufgabe ist durch Rückgängigmachen des Ableitens lösbar und setzt die Integralrechnung nicht voraus.*

b. Bestimmen Sie ohne Produkt- und Quotientenregel die erste Ableitung folgender Funktionen:

$i)\;\; f_1(x) = 2x \cdot (1 - 3x^4)$ $\boldsymbol{f'_1(x) = 2 - 30x^4}$

Bemerkung: *Das Ableiten von einfachen Grundfunktionen (BK 10) und das wertgleiche Umformen von Termen (BK 2) wird verlangt. Durch Ausmultiplizieren entsteht eine Polynomfunktion, danach ist das Ableiten elementar.*

$ii)\;\; f_2(x) = (x+1)^2 \cdot (x-1)$ $\boldsymbol{f'_2(x) = 3x^2 + 2x - 1}$

Bemerkung: *Das Ableiten von einfachen Grundfunktionen (BK 10) und das wertgleiche Umformen von Termen (BK 2) wird verlangt. Das Ausmultiplizieren ist einfacher, wenn die dritte Binomische Formel* $(x+1) \cdot (x-1)$ *als Faktor im Term erkannt wird. Danach ist das Ableiten der Polynomfunktion elementar.*

$iii)\;\; f_3(x) = \dfrac{3x^5 + 4x^2}{2x}$ $\boldsymbol{f'_3(x) = 6x^3 + 2}$

Bemerkung: *Das Ableiten von einfachen Grundfunktionen (BK 10) und das wertgleiche Umformen von Termen (BK 2) wird verlangt. Der Quotient ist für* $x \neq 0$ *wertgleich zum Polynom* $1.5x^4 + 2x$ *und daher die Ableitung ohne Quotientenregel bestimmbar.*

Aufgabe 3.2: Analysis (Eigenschaften von Kurven)

Gegeben sei die Polynomfunktion $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 27$.

a. Warum ist der Definitionsbereich von f die ganze Menge $\mathbb{R}$?

Die Operationen + und · sind für alle reelle Zahlen definiert.

Bemerkung: *Das Erkennen von Termen (BK 1) wird verlangt.*

b. Berechnen Sie die zwei Nullstellen von f. Warum hat diese Polynomfunktion dritten Grades nicht drei Nullstellen?

Es gilt $f(x) = (x-3)^2 \cdot (x+3)$, daher nur $x_1 = 3$ und $x_2 = -3$

Bemerkung: *Das Erkennen (BK1) und wertgleiche Umformen von Termen (BK2) wird verlangt. Die zwei Nullstellen können durch Probieren gefunden werden. Für eine Begründung wird aber die Faktorisierung des Polynoms gebraucht. Das Faktorisieren ist zum Beispiel durch doppeltes Ausklammern und Anwenden der dritten Binomischen Formel möglich.*

c. Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte von f und begründen Sie analytisch, ob der Punkt ein Minimum oder ein Maximum ist.

lokaler Minimumpunkt: $(3, 0)$;
bei $x = 3$ nimmt f' zu, wegen $f''(3) > 0$
lokaler Maximumpunkt: $(-1, 32)$;
bei $x = -1$ nimmt f' ab, wegen $f''(-1) < 0$

Bemerkung: *Das Ableiten von Grundfunktionen (BK10), das Lösen von quadratischen Geleichungen (BK5) und das Rechnen mit Zahlen (BK1) wird verlangt. In der Gleichung $f' = 0$ kann das Polynom einfach faktorisiert werden und die Lösungsformel für quadratische Gleichungen wird nicht gebraucht. Für die Begründung muss die Bedeutung der momentanen Änderungsrate klar sein.*

d. Warum wäre bei dieser Funktion f schon vor der Berechnung in der Teilaufgabe (c) klar gewesen, dass einer der Extrempunkte die x-Achse berührt? Machen Sie eine Skizze.

Weil die Funktion genau zwei Nullstellen hat.

Bemerkung: *Das Skizzieren des Graphen (BK9) in einem Koordinaten-system (BK8) wird verlangt.*

c. Warum hat jede Polynomfunktion dritten Grades genau einen Wendepunkt? Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes von f.

Für $a_3 \neq 0$ hat $f'' = 6a_3x + 2a_2 = 0$ genau eine Lösung.
Wendepunkt: $(1, 16)$

__Bemerkung:__ Das Ableiten einer einfachen Grundfunktion (BK10), das Lösen einer linearen Gleichung (BK4) und das Rechnen mit Zahlen (BK1) wird verlangt.

Aufgabe 3.3: Analysis (Eigenschaften von Kurven)

Gegeben sind die zwei Funktionen $f_1(x) = x^3 - 2x^2$ und $g_1(x) = 1 - x$.

a. An welchen Stellen x haben die zwei Funktionen die gleiche Steigung?

An den Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = \frac{1}{3}$

__Bemerkung:__ Das Ableiten von Grundfunktionen (BK10) und das Lösen von quadratischen Geleichungen (BK5) wird verlangt. Die quadratische Gleichung $3x^2 - 4x + 1 = 0$ kann mit dem Doppelklammer-Ansatz faktorisiert werden und die Lösungsformel für quadratische Gleichungen wird nicht unbedingt gebraucht.

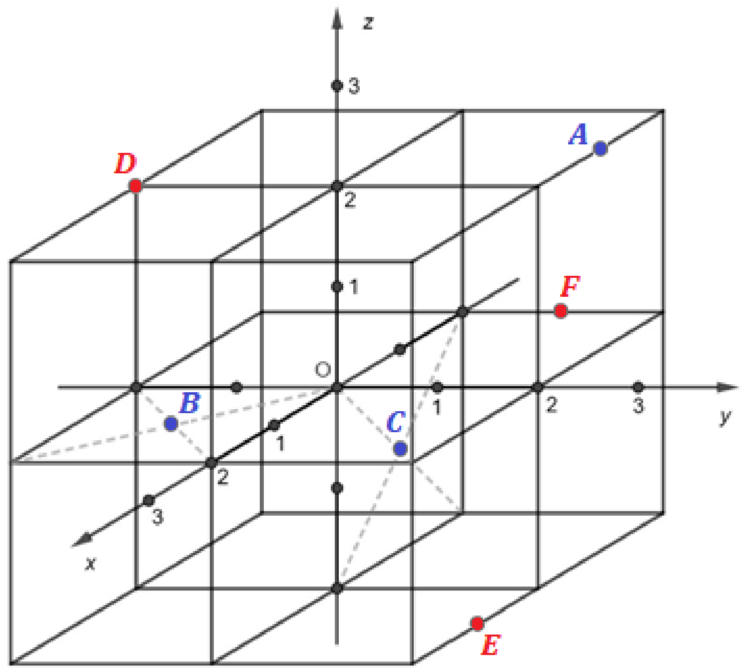
d. An den genau gleichen Stellen wie bei Teilaufgabe a) haben auch die zwei Funktionen $f_2(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ und $g_2(x) = -x - 4$ gleiche Steigung. Begründen Sie, warum das so ist.

Weil $f_1' = f_2'$ und $g_1' = g_2'$

__Bemerkung:__ Das Ableiten von Grundfunktionen (BK10) wird verlangt. Die Aufgabe kann auch geometrische gelöst werden, wenn erkannt wird (BK1), dass sich die Terme je nur um eine Konstante unterscheiden, die Graphen also in y-Richtung verschoben sind.

Aufgabe 3.4: Vektorgeometrie (Punkte im Koordinatensystem)

In der folgenden Figur ist ein Ausschnitt eines dreidimensionalen Koordinatengitters abgebildet.



a. Bestimmen Sie die ganzzahligen Koordinaten der Punkte A, B und C.

$$\boldsymbol{A = (-1, 2, 2), B = (1, -1, 0), C = (-1, 0, -1)}$$

Bemerkung: *Das Lesen eines dreidimensionalen Koordinatensystems (BK8) wird verlangt.*

b. Zeichnen Sie die Punkte $D = (0, -2, 2)$, $E = (1, 2, -2)$ und $F = (-2, 1, 0)$ oben in der Figur ein.

Bemerkung: *Das Einzeichnen von Punkten in ein dreidimensionales Koordinatensystem (BK8) wird verlangt.*

c. Welche Koordinaten hat der Mittelpunkt der Strecke AB?

$$\boldsymbol{(0, 0.5, 1)}$$

Bemerkung: *Das Lesen eines dreidimensionalen Koordinatensystems (BK8) und das Rechnen mit Zahlen (BK1) wird verlangt.*

d. Berechnen Sie die Länge der Strecke AB.

$$\boldsymbol{|AB| = \sqrt{17}}$$

__Bemerkung:__ Das Lesen eines dreidimensionalen Koordinatensystems (BK8) und das Anwenden des Satzes von Pythagoras (BK7) wird verlangt.

e. Liegt B oder C näher beim Ursprung O? Begründen Sie!

beide haben den gleichen Abstand $|\boldsymbol{OA}| = |\boldsymbol{OB}| = \sqrt{\mathbf{2}}$

__Bemerkung:__ Das Lesen eines dreidimensionalen Koordinatensystems (BK8) und das Anwenden des Satzes von Pythagoras (BK7) wird verlangt. Dass der Abstand gleich ist, kann auch ohne Rechnung begründet werden.

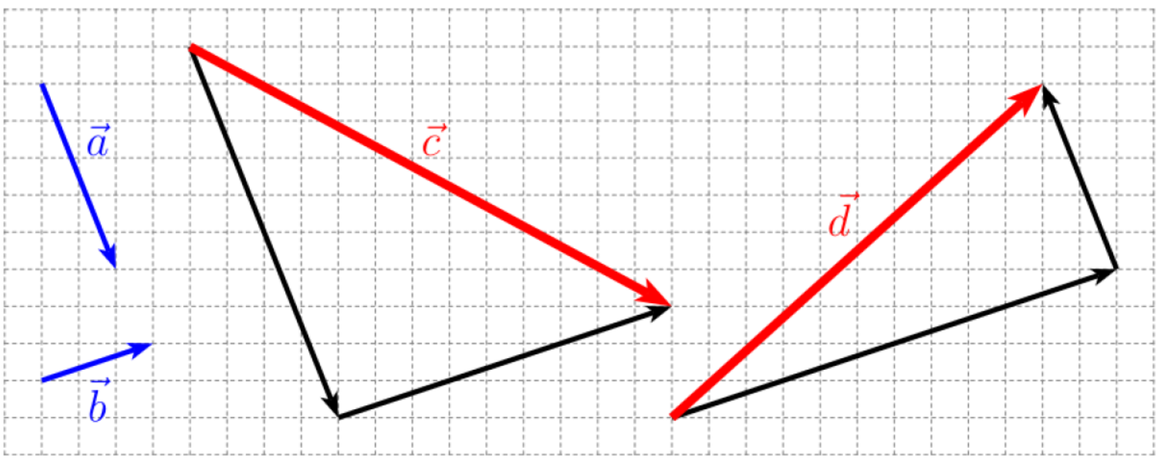
f. Der Punkt A wird durch den Ursprung O gespiegelt. Wie lauten die Koordinaten des Bildpunktes A'?

$\boldsymbol{A'} = (\mathbf{1}, -\mathbf{2}, -\mathbf{2})$

__Bemerkung:__ Das Lesen eines dreidimensionalen Koordinatensystems (BK8) wird verlangt.

Aufgabe 3.5: Vektorgeometrie (Vektoren im Koordinatensystem)

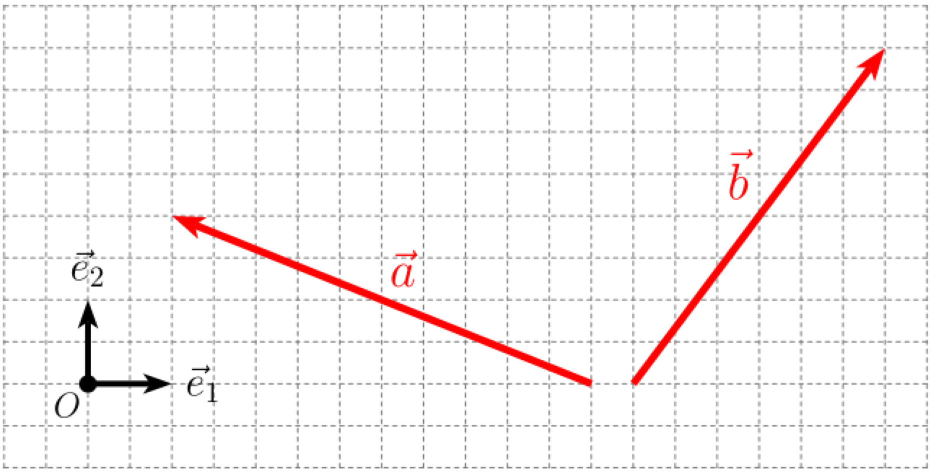
a. Gegeben sind die unten abgebildeten Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Zeichnen Sie die Vektoren $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ und $\vec{d} = 4\vec{b} - \vec{a}$.



__Bemerkung:__ Das Lesen eines zweidimensionalen Koordinatensystems

(BK8) wird verlangt.

b. Stellen Sie die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ im Koordinatensystem unten graphisch dar und berechen Sie die Komponenten der Vektoren $\vec{c} = 7\vec{a} + 3\vec{b}$ und $\vec{d} = -12\vec{a} - 4\vec{b}$.



$\vec{c} = \begin{pmatrix} \mathbf{-26} \\ \mathbf{26} \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} \mathbf{48} \\ \mathbf{-40} \end{pmatrix}$

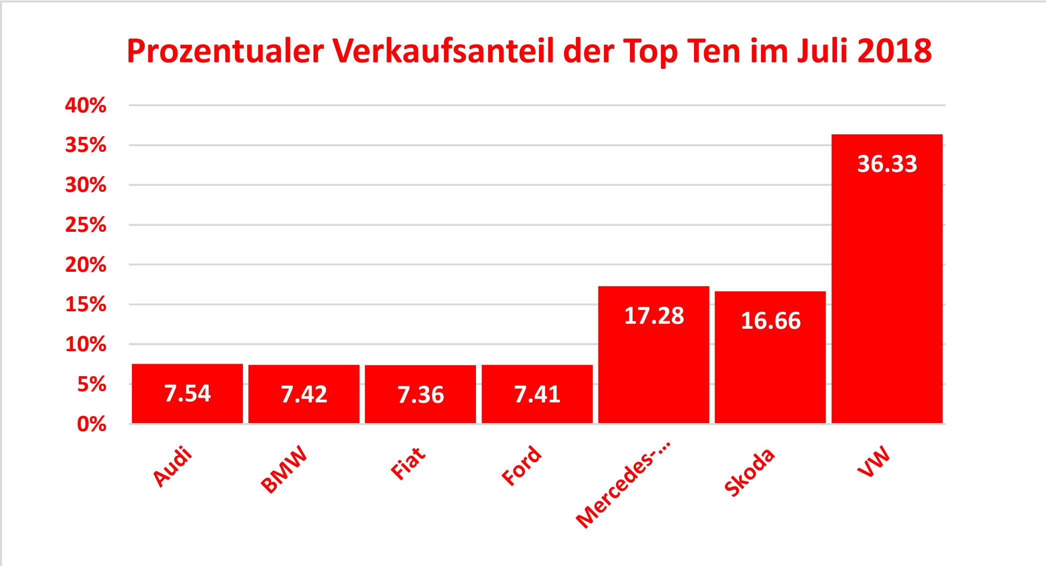
***Bemerkung:** Das Lesen eines zweidimensionalen Koordinatensystems (BK8) und das Rechnen mit Komponenten (BK1) wird verlangt.*

Aufgabe 3.6: Stochastik (Lage- und Streumasse von Daten)

In der folgenden Tabelle sind die 10 meistverkauften Fahrzeuge in der Schweiz im Juli 2018 angegeben.

	MARKE	MODELL	ANZAHL VERKÄUFE	PREIS CHF
1	Skoda	Octavia	4’999	22’890
2	VW	Golf	4’485	21’900
3	VW	Tiguan	3’975	41’890
4	Mercedes-Benz	GLC-Klasse	2’745	62’090
5	VW	Polo	2’445	17’500
6	Mercedes-Benz	C-Klasse	2’441	60’600
7	Audi	A3	2’262	59’200
8	BMW	X1	2’226	61’500
9	Ford	Kuga	2’225	34’850
10	Fiat	500	2’210	15’950

a. Erstellen Sie ein Säulendiagramm für die Marken unter den Top Ten, das den prozentualen Verkaufsanteil im Monat Juli zeigt.



Bemerkung: *Das Lesen einer Datentabelle (BK11) wird verlangt. Die relativen Häufigkeiten sollen mit einem Taschenrechner berechnet werden, der nicht automatisch statistische Grössen bestimmen kann, damit auch das Anwenden von Proportionalität (BK4) verlangt wird.*

b. Berechnen Sie den Mittelwert und den Median für den Preis der Top Ten im Juli.

$$\textbf{Mittelwert} = \mathbf{37447.46}$$
$$\textbf{Median} = \mathbf{34850}$$

Bemerkung: *Das Lesen einer Datentabelle (BK11), das Anwenden von Proportionalität (BK4) und das Rechnen mit Zahlen (BK1) wird verlangt. Der eingesetzte Taschenrechner soll die Lagemasse nicht automatisch bestimmen können.*

c. Erklären Sie, wodurch sich Median und Mittelwert unterscheiden.

Der Mittelwert der Preise gibt an, wie viel ein Fahrzeug kosten würde, wenn man die Summe aller bezahlten Preise gleichmässig auf alle Fahrzeuge verteilt. Der Median ist der Listenpreis, der genau in der Mitte der sortierten bezahlten

Preise liegt.

Bemerkung: *Das Erkennen und Verstehen von Termen (BK1) wird verlangt.*

d. Berechnen Sie den Quartilsabstand und die Standardabweichung für den Preis der Top Ten im Juli.

$$\textbf{Standardabweichung} = \mathbf{17851.74}$$
$$\textbf{Quartilsabstand} = \mathbf{59200 - 21900 = 37300}$$

Bemerkung: *Das Lesen einer Datentabelle (BK11), das Anwenden von Proportionalität (BK4) und das Rechnen mit Zahlen (BK1) wird verlangt. Der eingesetzte Taschenrechner soll die Streumasse nicht automatisch bestimmen können.*

e. Welche Informationen können aus dem Quartilsabstand und der Standardabweichung gewonnen werden?

Die Standardabweichung ist das Mass für die Streuung der einzelnen Preise um den Mittelwert. Der Quartilsabstand zeigt den mittleren Bereich (Spannbreite), in dem 50% der bezahlten Listenpreise liegen.

Bemerkung: *Das Erkennen und Verstehen von Termen (BK1) wird verlangt.*

f. Wie wirkt sich eine Preiserhöhung des teuersten Fahrzeugs auf die Kenngrössen Mittelwert, Median, Quartilsabstand und Standardabweichung aus?

Mittelwert und Standardabweichung erhöhen sich, Median und Quartilsabstand ändern sich nicht.

Bemerkung: *Das Erkennen und Verstehen von Termen (BK1) wird verlangt.*